FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE 1

A. Définitions

1- Introduction

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$.
On dit que *f* est une fonction de A vers B si tout nombre réel *x* de A a pour image par *f* au plus un (i.e. un ou zéro) nombre réel de B.
f ainsi définie est une fonction de la variable réelle *x*.

2- Ensemble de définition

L'ensemble de définition D_f de *f*, est la partie de A dont les éléments ont une image dans B.

Le mot défini signifie *déterminé*. Le mot indéfini signifie *infini*.

Rechercher l'ensemble de définition d'une fonction c'est déterminer le domaine (resp. l'intervalle) à l'intérieur duquel cette fonction n'admet que des valeurs finies.

3- Notation et représentation graphique

La fonction *f* de A vers B est une application de A dans B qui à *x* fait correspondre *y* tel que :

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un R.O.N.D. (i.e. un repère orthonormé direct) du plan *P*.

La représentation graphique de *f* consiste en l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$ $\forall x \in D_f$. Le point M décrit la courbe représentative (C) de *f* lorsque *x* décrit D_f .

4- Détermination pratique de l'ensemble de définition

Trois cas génériques : Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux fonctions

<u>1er cas</u> : fonction du type $f(x) = \dfrac{P}{Q}$

f est définie pour tout $Q \neq 0$

<u>2éme cas</u> : fonction du type $f(x) = \sqrt{Q}$

f est définie pour tout $Q \geq 0$

<u>3éme cas</u> : fonction du type $f(x) = \dfrac{P}{\sqrt{Q}}$

f est définie pour tout $Q > 0$

<u>N.B.</u> : Ensemble et intervalle de définition.

La fonction $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ admet pour ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}^*$

Elle admet pour intervalle de définition l'intervalle : $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

B. Continuité

Une fonction $y = f(x)$ est continue en un point x_0 où elle est définie si et seulement si elle admet en ce point une limite l finie

On dit que *f* est continue en x_0 ssi $\forall \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0$ tels que $\forall x \in I$

$$|x - x_0| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

C. Limites

1- Définition – Notation

Soit *f* une fonction $y = f(x)$ définie sur un intervalle I contenant le point x_0. On dit que *f* admet pour limite en ce point x_0 le nombre réel L ssi :

$\forall \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0$ tels que $\forall x \in I$

$$0 < |x - x_0| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

On note : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

2- Théorèmes

<u>Th1</u> : Limite d'une fraction rationnelle

En $\pm\infty$, la limite d'une fraction rationnelle est égale au quotient de ses termes de plus haut degré.

Th2 : Limite à gauche, à droite d'un point x_0 :

$$x-\varepsilon \quad x \quad x+\varepsilon$$

- Limite à gauche : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x_0 - \varepsilon)$

- Limite à gauche : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x_0 + \varepsilon)$

Formes indéterminées : $\dfrac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $\dfrac{0}{0}$; $\infty - \infty$

Th3 : Règle de L'Hospital

Guillaume de L'Hospital (1661-1704), marquis de Saint Mesme, est un élève de Jean Bernoulli qui lui apprend le calcul différentiel.
C'est ainsi que L'Hospital est le premier à écrire un traité sur ce nouvel outil, le livre *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696). C'est dans ce livre qu'apparait la célèbre règle de L'Hospital, qui permet parfois de lever des formes indéterminées du type 0/0.
En 1707, L'Hospital publie également un traité sur les coniques (*Traité analytique des sections coniques*), qui sera pendant un siècle un classique du genre. La connaissance du calcul différentiel fait que L'Hospital est un de ceux qui résoud le problème de la brachistochrone, indépendamment de mathématiciens prestigieux comme Newton ou Leibniz.
Toutefois, ce mérite est entâché par les déclarations, après la mort de son élève, de Jean Bernoulli : à la suite d'un arrangement financier, L'Hospital aurait publié sous son propre nom des résultats dus à Bernoulli.

Lien hypertexte : http://www.bibmath.net/index.php3

<u>Règle de L'Hospital</u> :

Soient f et g deux fonctions continues et dérivables respectivement sur un intervalle $\left[a,b\right]$ *et* $\left]a,b\right[$.

Si pour tout $x_0 \in \left]a,b\right[$, $g'(x_0) \neq 0$ *et si* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{0}{0}$

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Si cette limite tend de nouveau vers $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$ *on réitère la règle.*

D. Parité – Périodicité

- *Si* $f(-x) = f(x)$ *alors la fonction f est paire et sa représentation graphique admet l'axe (y'y) comme axe de symétrie.*

- *Si* $f(-x) = -f(x)$ *alors la fonction f est impaire et sa représentation graphique admet le point O (0,0) comme centre de symétrie.*

- *Si* $f(x+T) = f(x)$ *alors la fonction f est périodique de période T et sa représentation graphique se déduit par translation de vecteur* $T\ \vec{i}$.

E. Dérivées

1-Taux de variation

Le taux de variation d'une fonction *f* continue définie sur un intervalle $[a,b]$ est égale à :

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

T représente le coefficient directeur (i.e. la pente) de la droite (AB)

Si $T > 0$, *f* est croissante ; $T < 0$, *f* est décroissante.

2-Dérivabilité en un point x_0

Soient *f* une fonction continue et définie sur D_f et $x_0 \in D_f$.

On dit que *f est dérivable en* x_0 *ssi :*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = L \quad \text{avec L finie}$$

<u>Notation</u> : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$

<u>Théorème</u> : *Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point*. (ATTENTION ! la réciproque est FAUSSE !!!)

<u>Contre-exemple</u> : la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue et définie en $x = 0$ mais n'y est absolument pas dérivable $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3-Interprétation géométrique

Soir (C) la représentation graphique de *f* dans un R.O.N.D. $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Si *f* est dérivable en x_0, (C) admet une tangente en $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, de coefficient directeur : $f'\left(x_0\right)$. L'équation de cette tangent s'écrit :

$$\frac{y - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = f'\left(x_0\right)$$

4-Opérations sur les fonctions dérivables

Dérivées de la somme, du produit, du quotient, de l'inverse et d'une fonction de fonction.

Soient $U(x)$ et $V(x)$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Opérations sur les fonctions dérivables	
$(U + V)'$	$U' + V'$
$(k\,U)'$	$k\,U'$
$(U\,V)'$	$U'V+V'U$
$\left(U^n\right)'$	$nU^{n-1}U'$
$\left(\frac{U}{V}\right)'$	$\frac{U'V-V'U}{V^2}$
$\left(\frac{1}{V}\right)'$	$\frac{-V'}{V^2}$
$\left(\sqrt{U}\right)'$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$

Dérivée d'une fonction de fonction

Soient *f* et *g* deux fonctions dérivables sur un intervalle I, la fonction composée *f o g*, notée également $f\left[g\left(x\right)\right]$ est aussi dérivable sur I.

$$\left(f\left[g\left(x\right)\right]\right)' = g'\left(x\right)\ f'\left[g\left(x\right)\right]$$

<u>Exemple</u> :

$$Cos\left(ax+b\right) = -a\ Sin\left(ax+b\right)$$
$$Sin\left(ax+b\right) = a\ Cos\left(ax+b\right)$$

5-Dérivées d'ordre supérieur

Le lieu des points où la dérivée de la fonction *f* s'annule correspond au lieu des points où la fonction *f* présente des extrema, i.e., points où la fonction est maximum (respectivement minimum).

Le signe de la dérivée seconde de la fonction *f* évaluée en un extremum local permet de statuer sur la concavité (respectivement la convexité) de la courbe. En effet, si la fonction *f* admet en x_0 un extremum local, i.e., si $f'\left(x_0\right)=0$ et si $f''\left(x_0\right)>0$, la courbe (C) représentative de *f* admet en x_0 un minimum local, i.e., elle est concave (creux). Si, au contraire $f''\left(x_0\right)<0$, la courbe (C) représentative de *f* admet en x_0 un maximum local, i.e., elle est convexe (bosse). Si $f'\left(x_0\right)=0$ et si $f''\left(x_0\right)=0$, la courbe (C) représentative de *f* admet en x_0 un point d'inflexion horizontale.

F. Fonction réciproque (inverse) – Bijection

Si f est une fonction continue et strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante) sur un intervalle $[a,b]$ alors la fonction réciproque (inverse) de f notée f^{-1} appelée également bijection de $[a,b]$ dans $\left[f(a), f(b)\right]$ a les propriétés suivantes :

- Elle est strictement monotone sur $\left[f(a), f(b)\right]$ et varie dans le même sens que f
- Elle est continue sur $\left[f(a), f(b)\right]$

Les représentations graphiques de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (i.e., la droite d'équation $y=x$).

Exemple : Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) = x^2 \end{aligned}$$

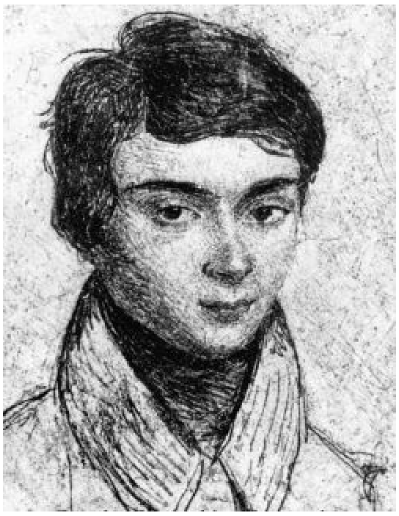
Il est aisé de démontrer que cette fonction est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$, i.e., sur $\mathbb{R}^+$.
Par conséquent, on peut définir la fonction réciproque de f ainsi :

$$\begin{aligned} f^{-1} &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ y &\mapsto x = f^{-1}(y) = \sqrt{y} \end{aligned}$$

Application à la détermination des racines d'une équation

Peut-on résoudre par la méthode des radicaux (discriminant pour une équation du second degré) n'importe quelle équation de degré n ?

La réponse à cette question fut donnée par l'un des plus grands mathématiciens au monde : le français Évariste Galois mort tragiquement en duel à l'âge de 20 ans !



Évariste Galois
(Bourg-la-Reine, 25 octobre 1811 - Paris, 31 mai 1832) était un mathématicien français.
Alors qu'il était encore élève au lycée Louis-le-Grand, il détermina une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme soit résoluble par radicaux, et résolut ainsi un très vieux problème. En dépit de ce don exceptionnel pour les mathématiques et de l'étendue de ses connaissances, il échoua à deux reprises au concours d'entrée à l'École polytechnique. En 1829, il est finalement admis à l'École préparatoire. Il mourut lors d'un duel à l'âge de vingt ans. Il fut le premier à utiliser le mot « groupe » comme un terme mathématique pour désigner un « groupe de permutations ». Son travail sur la théorie des équations fut soumis à l'Académie des Sciences et fut examiné par Poisson qui ne le comprit pas. Il fut à nouveau présenté sous une forme condensée, mais sans plus de succès. L'importance et la portée de son travail ne furent pas reconnues pendant sa courte vie.
Son travail posait les fondements de l'actuelle théorie de Galois, branche majeure de l'algèbre générale, ceux des suites pseudo-aléatoires (PN) et de la correction des erreurs dans le codage des applications. Galois était un républicain convaincu et en 1831, au cours d'un banquet, il porta un toast, avec un couteau à la main au-dessus de son verre, à Louis-Philippe, ce qui lui valut dix mois de prison. Certains pensent que sa mort dans un duel a été organisée par la police secrète. Dans la nuit du 29 mai 1832, qui précéda le duel qui l'opposait à un officier pour défendre l'honneur d'une femme, il pressentit que sa mort était imminente, et veilla toute la nuit pour écrire plusieurs lettres à son ami républicain Auguste Chevalier, et composa ce qui devint son testament mathématique. Dans ses derniers papiers, après avoir rapporté sa théorie sur les équations résolubles par radicaux, il termina en donnant un aperçu de ses derniers travaux en analyse et demanda à son ami de faire imprimer cette lettre dans la Revue encyclopédique. Le lendemain il fut touché à l'abdomen et mourut de ses blessures à l'âge de 20 ans (probablement d'une péritonite), le jour suivant à l'hôpital Cochin et après avoir refusé les offices d'un prêtre. Ses derniers mots furent pour son frère :

« Ne pleure pas, Alfred ! J'ai besoin de tout mon courage pour mourir à vingt ans ! »

Son travail resta incompris jusqu'en 1843 lorsque Liouville lut son manuscrit et déclara que Galois avait vraiment résolu le problème posé pour la première fois par Abel. Le manuscrit fut finalement publié en octobre ou novembre 1846 dans le Journal des mathématiques pures et appliquées.

Evariste Galois démontra qu'il est impossible de résoudre une équation de degré supérieur ou égal à 5 par la méthode des radicaux, i.e., il est impossible de déterminer analytiquement les solutions d'une telle équation.

Lien hypertexte : http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89variste_Galois

Théorème de la dichotomie :

Soit f continue sur l'intervalle $[a,b]$ *si* $f(a) \times f(b) < 0$ *alors il existe au moins une valeur* $x_0 \in \left]a,b\right[$ *telle que* $f(x_0) = 0$.

Ce théorème qui définit l'existence d'une application réciproque (bijection) permet de déterminer les valeurs des racines de n'importe quelle équation (en particulier les équations de degré supérieur ou égal à 5).

T.D. N°1 FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

N°1 : Ensembles et intervalles de définition des fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^4-1} \;;\; f(x)=\frac{\sqrt{2x+3}}{x^4-1} \;;\; f(x)=\frac{2x+3}{\sqrt{x^4-1}} \;;\; f(x)=\sqrt{\frac{2x+3}{x^4-1}} \;;$$

N°2 : Étudier la continuité des fonctions suivantes en $x=1$:

$$f(x)=\frac{x+2}{x-1} \;;\; f(x)=\sqrt{x-1} \;;\; f(x)=\frac{3}{\sqrt{x-1}} \;;\; f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x^2-1}} \;;$$

N°3 : Domaines de définition et limites des fonctions suivantes :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+3} \;;\; \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} \;;\; \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2+x+1}-ax \;;\; \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x+1+\sqrt{x^2+x-2}} \;;$$

N°4 : Calculs de limites

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-Tan(x)}{Cos(2x)} \;;\; \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{Sin(3x)}{1-2Cos(x)} \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(x)}{x^\alpha} \;;\; \lim_{x\to 1}\frac{e^x-1}{x} \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{Tan(ax)}{x} \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{Sin(ax)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-Cos(x)}{x^2} \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{1-Cos(x)}{x} \;;\; \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$$

N°5 : Calculs des dérivées

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \;;\; f(x)=\frac{1}{1+|x|} \;;\; f(x)=\frac{1}{x-1} \;;\; f(x)=Cos(ax+b) \;;$$

N°6 : Règle de dérivation

Démontrer que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire et vice versa

ETUDE DE FONCTIONS 2

A. Définitions

- Détermination et réduction (parité / périodicité) du domaine (intervalle) d'étude.
- Continuité

B. Limites

- Calcul des limites aux bornes du domaine (intervalle) d'étude.
  (Utilisation des Théorèmes 1, 2 & 3)

- Détermination des asymptotes

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale.

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale.

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique.

C. Dérivée – Dérivabilité

Si $f'(x) > 0$ alors la fonction *f* est croissante.

Si $f'(x) = 0$ alors la fonction *f* est constante.

Si $f'(x) < 0$ alors la fonction *f* est décroissante.

D. Tableau de variations

Tableau synoptique représentant l'évolution de la fonction *f* restreinte à l'intervalle d'étude.

E. Représentation graphique

Utilisation des résultats précédents pour établir une représentation de la fonction *f* sur tout son domaine (intervalle) de définition. (Vérification à l'aide d'un calculateur scientifique : Mathematica, Maple, MatLab, TI, Casio, …)