INTÉGRALES IMPROPRES 7

A. Introduction - Rappel

Pour qu'une fonction *f* de la variable réelle *x* soit intégrable au sens de Riemann il suffit qu'elle soit continue par morceaux sur un intervalle $\left[a,b\right]$. Dans le cas où la fonction *f* à intégrer est discontinue pour des valeurs isolées de la variable *x* comprises dans les limites d'intégration on fait appel à la notion d'intégrale impropre.

B. Définition

Soit *f* une fonction numérique de la variable réelle *x* définie et continue pour toutes les valeurs de *x* comprises entre les limites *a* et *b*, excepté pour $x = a$.
Si $a < b$ et ε positif on a :

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f\left(x\right)dx \qquad (1)$$

et, quand la fonction *f* est continue, excepté pour $x = b$ on a :

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f\left(x\right)dx \qquad (2)$$

à condition que les limites soient des quantités définies (finies).

C. Extension aux intervalles infinis

Supposons les fonctions continues par morceaux sur les intervalles infinis considérés.

On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si la limite de l'intégrale est finie.

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(x)\,dx \to l \;(\mathit{finie})$$

Cas particulier des intégrales du type $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

Théorème 1 :

> L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

On dit que $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ converge si la limite de l'intégrale est finie.

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(x)\,dx \to l \;(\mathit{finie})$$

D. Extension aux fonctions non-bornées sur $[a,b]$

Supposons les fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$

1. Supposons que $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \to \pm\infty$

On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si la limite de l'intégrale est finie.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \int_x^b f(x)\,dx \to l \ (\mathit{finie})$$

<u>Cas particulier des intégrales du type</u> $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$

<u>Théorème 2</u> :

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$

2. Supposons que $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) \to \pm\infty$

On dit que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge si la limite de l'intégrale est finie.

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(x)\,dx \to l \ (\mathit{finie})$$

<u>Cas particulier des intégrales du type</u> $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$

<u>Théorème 3</u> :

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$

3. Supposons que $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x) \to \pm\infty$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x) \to \pm\infty$

On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si l'en est ainsi des intégrales, i.e.,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} \int_x^c f(x)\,dx \to l \ (finie) \text{ et } \lim_{\substack{x \to b \\ x<b}} \int_c^x f(x)\,dx \to l \ (finie)$$

avec $c \in \left]a,b\right[$

4. Supposons que $\lim\limits_{x \to c} f(x) \to \pm\infty$

On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si l'en est ainsi des intégrales, i.e.,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \to l \ (finie) \text{ et}$$

avec $c \in \left]a,b\right[$

T.D. N°7 INTÉGRALES IMPROPRES

N°1 : Montrer que :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{\pi}{2ab}$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}$

3. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}} = \frac{44}{3}$

N°2 : Montrer que

1. $\displaystyle\int_0^a \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi a^2}{4}$

2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

N°3 : Montrer que les intégrales suivantes divergent

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

2. $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2x-1)^{\frac{4}{3}}}$