INTÉGRALES 6

A. Introduction

La détermination d'une intégrale d'une fonction consiste en l'opération inverse de la dérivée. En effet, chercher une intégrale (ou une primitive) c'est rechercher la fonction qui dérivée conduit à cette fonction.

B. Définition

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie et continue sur un intervalle $I = [a, b]$. Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$ sur I. On appelle intégrale de $f(x)$ de "a" à "b" le réel $F(b) - F(a)$ et l'on note :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

C. Fonction intégrable

On dit qu'une fonction est intégrable sur I si et seulement si elle est continue sur I.

Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $I = [a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Démonstration :

$x \mapsto \phi(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ est a primitive qui s'annule en $x = a$.

$$\phi'(x) = \left(\int_a^x f(x)\,dx\right)' = \left(\left[F(x)\right]_a^x\right)' = \left(F(x) - F(a)\right)' = F'(x) = f(x)$$

$$\phi'(x) = F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = F(x)$$

C.Q.F.D.

D. Propriétés

1. Si $f(x) > 0$ sur $I = [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) > 0$
2. Si $f(x) < 0$ sur $I = [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) < 0$
3. $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$ (surface nulle)
4. $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ (Relation de Chasles)
5. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (inversion des bornes)
6. Si $f(x)$ est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ (Parité I)
7. Si $f(x)$ est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ (Parité II)

E. Application au calcul des intégrales

1. Intégration par parties (I.P.P.)

Le principe de l'I.P.P. est basé sur la dérivation du produit de deux fonctions : $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
Une I.P.P. permet d'abaisser le degré de complexité (et aussi le degré du polynôme) que renferme une intégrale. Une I.P.P. transforme un produit de fonctions non-intégrables en un produit intégrable.

T.D. N°6 INTÉGRALES

N°1 : Intégration par parties

1. $\int_0^{\pi/2} (2x+1)Cos(x)\,dx$ 2. $\int_1^e Ln(x)\,dx$ 3. $\int t\,Ln(t)\,dt$

N°2 : Changement de variables :

1. $\int_0^1 \frac{dx}{3x-10}$; $u = 3x-10$ 2. $\int_1^2 \frac{dx}{(2x-5)^3}$; $u = 2x-5$

3. $\int_0^{\pi/3} Cos\left(2x-\pi/2\right)dx$; $u = 2x-\pi/2$

4. $\int_0^1 e^{2x-1}dx$; $u = 2x-1$ 5. $\int_0^1 xe^{x^2}dx$; $u = x^2$

6. $\int_0^1 Tan(x)\,dx$; $u = Cos(x)$ 7. $\int_0^1 \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}dx$; $u = 2x^2+2x+1$

8. $\int_0^1 \frac{2x-3}{\left(x^2-3x+1\right)^2}dx$; $u = x^2-3x+1$

N°3 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\pi/2} x^2 Sin(x)\,dx$ 2. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+3x)^2}dx$ 3. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+3x)^5}dx$