DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS 5

A. Définitions

Soit *f* une fonction numérique de la variable réelle *x* définie sur un intervalle I contenant 0 et *n* un entier naturel. On dit que *f* admet un développement limité à l'ordre *n* au voisinage de 0 s'il existe une fonction polynômiale $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de degré inférieur ou égal à *n* et une fonction numérique $O(x^n)$ définie sur I et continue en 0 telle que :

$$f(x)=P_n(x)+O(x^n) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} O(x^n)=0$$

Remarques :
La notation $O(x^n)$ fut introduite par le Mathématicien Russe Lev. Landau, prix Nobel de Physique en 1962

Lien hypertexte : http://fr.wikipedia.org/wiki/Lev_Landau

Proposition : *Unicité du développement limité*

Soit *f* une fonction numérique de la variable *x* admettant un D.L. à l'ordre *n* au voisinage de 0 : $f(x)=P_n(x)+O(x^n)$.
Alors les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont définis de façon unique.

La une fonction polynômiale $P_n(x)$ s'appelle la **partie régulière** du développement limité (D.L.) de *f* à l'ordre *n*.

Si *f* est paire (resp. impaire) alors $P_n(x)$ est paire (resp. impaire)

B. Théorème de Taylor-Young

Soit I un intervalle contenant 0 et soit f une fonction admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n au moins et telle que $f^{(n)}(x)$ *soit continue. Alors f admet n au voisinage de 0 le développement limité à l'ordre suivant :*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + O(x^n)$$

Au voisinage du point $x = x_0$, le D.L. de Taylor-Young s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + O(x^n)$$

Brook Taylor : éclectique homme de Sciences Anglais, né à Edmonton (Angleterre) le 18 août 1685, et mort à Londres le 29 décembre 1731. Il s'intéressa aux mathématiques, à la musique, la peinture et la philosophie.

William Henry Young

Londres, 20 octobre 1863 - Lausanne, 7 juillet 1942 est un mathématicien anglais issu de l'université de Cambridge et ayant travaillé à l'université de Liverpool et à celle de Lausanne.

C. Propriétés des développements limités

1. Somme, produit et quotient

- *Le développement limité de la somme est égal à la somme des développements limités*

- *Le développement limité du produit est égal au produit des développements limités en ne gardant que les termes du degré le plus bas*

$$D.L.(f \cdot g)_n = Tronc_n \left\{ D.L.(f)_n \cdot D.L.(g)_n \right\}$$

où $D.L.(f)_n$ *désigne le développement limité de f à l'ordre n et* $Tronc_n \left\{ P(x) \right\}$ *désigne la troncature de P(x) à l'ordre n.*

<u>*Exemple 1*</u> *:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + O(x^3)$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + O(x^3)$$

$$D.L.(f \cdot g)_2 = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + O(x^3)$$

- *Le développement limité du quotient est égal au quotient de la division de la partie régulière de f par celle de g suivant les puissances croissantes à l'ordre n.*

2. Développement d'une fonction composée

Soient I et J deux intervalles contenant 0. Soit g une application de I dans J telle que g(0) = 0 et que g admette un développement limité à l'ordre n. Si f admet également un développement limité à l'ordre n, la composée f o g admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière s'obtient en composant la partie régulière de f et la partie régulière de g et en tronquant à n le résultat.

Exemple 2 :

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$
$$g(x) = x + x^2 + O(x^3)$$

$$D.L.(f \circ g)_2 = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + O(x^3)$$

D. Application au calcul des limites

Soit f une fonction admettant au voisinage de zéro un développement limité d'ordre n. Le terme non nul de plus bas degré de la partie régulière(non nulle) correspondante représente la limite de f au voisinage de zéro.

Exemple 3 :

$$D.L.(Sin(x)) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$
$$\frac{Sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + O(x^3)$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{Sin(x)}{x} = 1$$

E. Étude locale d'une courbe.

On considère *f* une fonction numérique de la variable réelle *x* définie sur un intervalle $I =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et *p* un entier naturel admettant un développement limité à l'ordre *p* au voisinage de x_0 de partie régulière : $P_p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p$ avec $p \geq 2$ tel que $a_p \neq 0$

Alors la tangente Γ à la courbe C_f représentative de *f* a pour équation : $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ et la position de C_f par rapport à Γ est donnée par le signe de : $a_p(x - x_0)^p$

<u>1^er^ cas</u> : *p* est pair

Le point $M(x_0, f(x_0))$ est dit *ordinaire*.

- Si $a_p > 0$ alors C_f est au-dessus de Γ
- Si $a_p < 0$ alors C_f est en-dessous de Γ

Si $a_1 = 0$ alors le point M est un extremum

- Si $a_p > 0$ alors le point M est un minimum et *f* est convexe
- Si $a_p < 0$ alors le point M est un maximum et *f* est concave

<u>2^ème^ cas</u> : *p* est impair

Le point $M(x_0, f(x_0))$ est *point d'inflexion* et C_f traverse Γ en M

F. Développement limités usuels.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\\
\cosh x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\\
\sinh x &= x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)\\
\ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}+o(x^n)\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\\
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})\\
\mathrm{arctanh} x &= x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\cdots+\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\\
\arcsin x &= x+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})\\
\mathrm{arcsinh} x &= x-\frac{x^3}{6}+\cdots+(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})\\
\tan x &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^8)
\end{aligned}
$$

Lien hypertexte : http://www.bibmath.net/formulaire/limite3.php3

T.D. N°5 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

N°1 : Soit à calculer $\sqrt{1.002}$

- Écrire le D.L. au premier ordre de la fonction $f(x)=\sqrt{1+x}$
- Même exercice avec $Ln(1.002)$

N°2 : Soit les D.L. au voisinage de zéro :

$$f(x)=1+x+x^2+O(x^3)\ ;\ g(x)=1+2x+x^3+O(x^4)\ ;\ h(x)=4+x^2+O(x^3)$$

Donner les D.L. d'ordre maximum au voisinage de zéro de : $f+h\ ;\ f+g\ ;\ fg\ ;\ \dfrac{f}{g}\ ;\ \dfrac{g}{h}$

N°3 : Calculer le D.L. au voisinage de zéro, à l'ordre indiqué n :

- $f(x)=sin(x)cos(x)\ ;\ n=4\ ;\ g(x)=\dfrac{1}{cos(x)}\ ;\ n=4$
- $h(x)=x-Arc\tan(x)\ ;\ n=4\ ;\ k(x)=\dfrac{x}{Sin(x)}\ ;\ n=4$
- $l(x)=Ln\left(\dfrac{Sin(x)}{x}\right)\ ;\ n=3\ ;\ m(x)=Ln\left(1+Tan(x)\right)\ ;\ n=3$
- $n(x)=e^{Cos(x)}\ ;\ n=3\ ;\ p(x)=e^{ch(2x)}\ ;\ n=3$

N°4 : Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2sin^2(x)}{x-sin(x)}\ ;\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{sin(3x)}{1-e^{2x}}\ ;\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{cos(x)-sin(x)-1+x}{Arctan(x)-sh(x)}$
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{cos(x)}-1+sin\left(\dfrac{x^2}{4}\right)}{tan(x)-th(x)}\ ;\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{xLn(x)}{x^2-1}\ ;\ \lim\limits_{x\to2}\dfrac{2^x-4}{x-2}$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2Ln(1+x)\right]\ ;\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-Tan(x)}{Cos(2x)}$