FONCTIONS HYPERBOLIQUES 4

A. Fonctions exponentielle, puissance et logarithme

1. La fonction exponentielle de base a ($a > 0$)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = a^x = e^{xLn(a)}$$

Cette fonction est continue et définie sur $\mathbb{R}$ *et sa dérivée s'écrit :*

$$\boxed{(a^x)' = \left(e^{xLn(a)}\right)' = Ln(a)e^{xLn(a)} = Ln(a)a^x}$$

Cas particulier : l'exponentielle de base e

Propriétés :

- $e^0 = 1$; $e^1 = e$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ Ln(e^x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{Ln(x)} = x$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ (e^x)^n = e^{nx} \Rightarrow e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

Limites :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$; $\alpha \in \mathbb{Z}$

2. La fonction logarithme de Neper

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = Ln(x)$$

Cette fonction est continue et définie sur $\mathbb{R}_+^*$ *et sa dérivée s'écrit :*

$$\boxed{(Ln(x))' = \frac{1}{x}}$$

Propriétés :

- $Ln(1) = 0$
- $Ln(e) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ Ln(e^x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{Ln(x)} = x$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ Ln(x \times y) = Ln(x) + Ln(y)$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ Ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = Ln(x) - Ln(y)$
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ Ln(x^n) = n \times Ln(x)$
- $\forall\ 0 < x < 1\ ,\ Ln(x) < 0$

Limites :

- $\lim\limits_{x \to \infty} Ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} Ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{Ln(x)}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{Ln(x)}{x^\alpha} = 0^+ \ ; \ \alpha \in \mathbb{Z}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Ln(1+\alpha x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha x}{Ln(1+\alpha x)} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha Ln(x) = 0 \ ; \ \alpha > 0$

3. La fonction puissance

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = x^m = e^{mLn(x)}$$

Cette fonction est continue et définie sur $\mathbb{R}_+^*$ *et sa dérivée s'écrit :*

$$\boxed{(x^m)' = mx^{m-1}}$$

4. La fonction cosinus hyperbolique

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

La fonction $y = ch(x)$ *est une fonction PAIRE.*
Cette fonction est continue et définie sur $\mathbb{R}$ *et sa dérivée s'écrit :*

$$\boxed{(ch(x))' = sh(x)}$$

5. La fonction sinus hyperbolique

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

La fonction $y = sh(x)$ *est une fonction IMPAIRE.*
Cette fonction est continue et définie sur $\mathbb{R}$ *et sa dérivée s'écrit :*

$$\boxed{(sh(x))' = ch(x)}$$

6. La fonction tangente hyperbolique

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

La fonction $y = th(x)$ *est une fonction IMPAIRE.*
Cette fonction est continue et définie sur $\mathbb{R}$ *et sa dérivée s'écrit :*

$$\boxed{(th(x))' = \frac{1}{ch^2(x)}}$$

Relations importantes :

$$\boxed{\begin{gathered} ch^2(x) - sh^2(x) = 1 \\ ch(x) + sh(x) = e^{x} \\ ch(x) - sh(x) = e^{-x} \\ \frac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x) \end{gathered}}$$

Lien hypertexte : http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_hyperbolique

B. Fonctions hyperboliques inverses

1. La fonction argsinus hyperbolique

$$y = Argsh(x) = Ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = sh(y)$$

Cette fonction continue et définie sur $\mathbb{R}$ *et sa dérivée s'écrit :*

$$\boxed{\left(Argsh(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

2. La fonction argcosinus hyperbolique

$$y = Argch(x) = \pm Ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = ch(y)$$

Cette fonction continue et définie sur $]1,+\infty[$ *et sa dérivée s'écrit :*

$$\boxed{\left(Argch(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

3. La fonction argtangente hyperbolique

$$y = Argth(x) = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = th(y)$$

Cette fonction continue et définie sur $]-1,+1[$ *et sa dérivée s'écrit :*

$$\boxed{\left(Argth(x)\right)' = \frac{1}{1-x^2}}$$

T.D. N°3 FONCTIONS HYPERBOLIQUES

N°1 : Étudier le passage de la trigonométrie circulaire à la trigonométrie hyperbolique.

N°2 : Étudier les fonctions : $ch(x),\ sh(x),\ th(x),\ th\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

N°3 : Démontrer que :

- $$sin(x)=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

- $$sh(x)=\frac{2th\left(\frac{x}{2}\right)}{1-th^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

N°4 : Démontrer que $Arctan\left(sh(x)\right)=Arcsin\left(th(x)\right)$

N°5 : Étudier la fonction $f(x)=Argch\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

N°6 : Démontrer que $Argth(x)=\frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

N°7 : Étudier la fonction $f(x)=Argth\left(\frac{1}{x}\right)$